

Newtonowskie trajektorie planet przy nietypowych wzorach na grawitację

Stefan Sokołowski*

Gdańsk, 31 lipca 2015

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Problem dwóch ciał	2
3	Geometria (pod)biegunowa	4
4	Radialność pola grawitacyjnego	5
5	Konkretne siły przyciągania	7
5.1	Przypadek $K^2 = B$, trajektorie spiralne	8
5.2	Przypadek $K^2 > B$, trajektorie newtonowskie	9
5.3	Przypadek $K^2 < B$, trajektorie katastroficzne	12
6	Poprawki do grawitacji newtonowskiej	13
7	Poglądowe wyjaśnienie wszystkiego, co się da	14
7.1	To zasługa momentu pędu	15
7.2	Skąd precesje?	16
	Do czytania	17

1 Wstęp

Wszyscy wiemy, że według Newtona mała masa jest grawitacyjnie przyciągana przez dużą masę z siłą proporcjonalną do r^{-2} (czyli odwrotnie proporcjonalną do r^2), gdzie r jest odległością środka małej masy od środka dużej masy.

Dlaczego siła jest odwrotnie proporcjonalna akurat do kwadratu odległości? Czy tylko dlatego, że tak rzecze Newton? I właściwie na jakiej podstawie on tak rzecze? Newton

*Instytut Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego oraz Instytut Informatyki Stosowanej PWSZ w Elblągu.

znał prawa Keplera i wiedział, że planety poruszają się (w zasadzie) po elipsach. Próbował więc tak dopasować wzór na siłę grawitacji, żeby wynikły z niego elipsy. Ale wiedział też o odstępstwach ruchów planet od eleganckich praw Keplera. Zarówno Księżyc obiega Ziemię, jak i Merkury obiega Słońce, po „rozetkach”, a nie dokładnie po elipsach (to zostanie omówione dalej w artykule). Newton próbował więc zastąpić r^{-2} w swoim wzorze czymś w rodzaju $r^{-2.01}$ albo $r^{-1.99}$... Jednak później doszedł do wniosku, że dla wyjaśnienia nieregularności w ruchu ciał niebieskich lepiej wziąć pod uwagę dodatkową grawitację, pochodzącą od innych ciał niebieskich, niż zmieniać wzór na grawitację.

W tym artykule chciałbym przejrzeć kilka różnych konkurentów dla wzoru Newtona na grawitację i sprawdzić, jakie kształty orbit będą z nich wynikały. Oczywiście wzory, prowadzące do orbit niezgodnych z obserwacjami, należy odrzucić. To jest tylko trochę fizyka, a bardziej geometria z równaniami różniczkowymi, które postaram się przedstawić możliwie prosto. Ale równania różniczkowe mają to do siebie, że nie zawsze dadzą się rozwiązać symbolicznie, to znaczy nie zawsze da się wypisać ich rozwiązanie jawnym wzorem ogólnym.

Duża część tego opracowania (rozdz. 3 i 4) opiera się na witrynie internetowej [1], a czego nie zrozumiałem od razu, to znalazłem w [2]. Sądzę, że w tym artykule Czytelnik nie znajdzie niczego, o czym nie wiedziałby już sam Newton — z drugiej strony ja nie znalazłem nigdzie starannie opisanych konsekwencji nietypowych wzorów na grawitację.

2 Problem dwóch ciał

Założmy, że dwa ciała, obdarzone masą, krążą wokół siebie w pustym poza nimi kosmosie. Mamy ustalić kształt trajektorii ich ruchu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że masy tych ciał są bardzo nierówne, wobec tego większe z nich (*Słońce*) jest praktycznie nieruchome, a drugie (*Planeta*) krąży wokół pierwszego. Ruch będziemy opisywać z punktu widzenia Słońca.

Trzy prawa Keplera, opisujące ten ruch, zostały sformułowane „spod dużego palca” w oparciu o obserwacje astronomiczne. Z dzisiejszego punktu widzenia nie były żadnymi prawami, bo nie zostały udowodnione, były tylko śmiałymi hipotezami, z którymi mniej więcej zgadzały się tory sześciu znanych Keplerowi planet¹ i Księżyca. Te prawa/hipotezy brzmią następująco (za [1]):

1. Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której jednym z ognisk znajduje się Słońce.
2. Wektor wodzący planety, czyli odcinek prostej, łączący środek Słońca ze środkiem planety, zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity. Oznacza to, że wielkość dS/dt , gdzie S oznacza pole powierzchni zakreślanej przez ten wektor, jest stała.

¹Uran został odkryty dopiero w końcu wieku XVII; Neptun w wieku XIX. Chociaż niektórzy widzą Neptuna już na rysunkach wykonanych przez Galileusza w początku wieku XVII.

3. Kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześciannu półosi wielkiej tej orbity².

Kilkadziesiąt lat po Keplerze Newton sformułował zasadę powszechnego ciążenia. Orzekła ona, że między każdymi dwiema masami działa siła przyciągająca, skierowana po linii łączącej te masy i proporcjonalna do każdej z nich oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

G — stała grawitacji równa ok. $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
 M — masa Słońca
 m — masa Planety
 $\vec{r}$ — promień wodzący Planety
 $r = |\vec{r}|$ — długość promienia wodzącego Planety

Prawa Keplera okazały się wnioskiem rachunkowym z tej zasady. Tak często bywa w fizyce: *najpierw* są obserwacje, *potem* hipoteza dopasowana do tych obserwacji, a *jeszcze później* teoria przewidująca wyniki obserwacji. Dopiero wtedy fizyk wie, że rozwiązał problem.



Johannes Kepler, 1571–1630
(z Wikipedii)

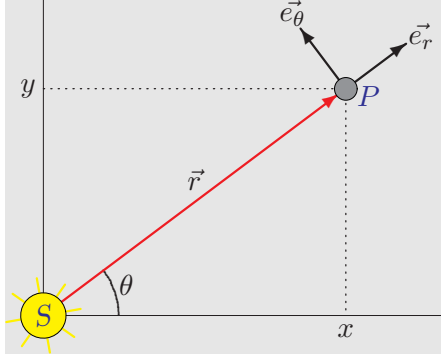


Isaac Newton, 1642–1727
(z Wikipedii)

A ja spróbuję, poza wyprowadzeniem praw Keplera ze wzoru (1) Newtona, wyprowadzić jeszcze inne prawa innego Keplera ze zmodyfikowanej zasady Newtona.

²Wyprowadzenia trzeciego prawa Keplera nie ma w tym artykule.

3 Geometria (pod)biegunowa



Jak wcześniej zostało powiedziane, Słońce S będziemy traktować jak nieruchome, obiegane przez planetę P . Jej promieniem wodzącym jest $\vec{r}$. Współrzędne planety zmieniają się w czasie t . Geometrię tych zmian musimy przeliczyć ze współrzędnych kartezjańskich x i y na współrzędne *biegunowe* r i θ :

$$x = r \cdot \cos \theta \quad \text{ i } \quad y = r \cdot \sin \theta$$

W planecie mamy zaczepione dwa wersory (czyli wektory długości 1):

- $\vec{e}_r = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$ wskazujący kierunek wprost od Słońca, oraz
- $\vec{e}_\theta = \langle -\sin \theta, \cos \theta \rangle$ prostopadły do $\vec{e}_r$ i skierowany w stronę coraz większych kątów θ .

Oczywiście w trakcie ruchu planety wersory te zmieniają swój kierunek. Niech $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ oznacza *prędkość kątową* planety, czyli prędkość zmiany kąta promienia wodzącego. Zapiszmy prędkość zmiany wersorów $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\theta$ w terminach ich samych oraz prędkości kątowej:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \langle -\sin \theta, \cos \theta \rangle = \omega \cdot \vec{e}_\theta \quad (2)$$

oraz

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \langle -\cos \theta, -\sin \theta \rangle = -\omega \cdot \vec{e}_r \quad (3)$$

Teraz spróbujmy wyrazić prędkość i przyspieszenie samej planety. Bierzemy przy tym pod uwagę biegunowe przedstawienie wektora wodzącego:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

Tak więc z (2):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta$$

oraz

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\theta \right) \\
&= \left(\frac{d^2r}{dt^2} \cdot \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right) + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right) \\
&\quad (\text{i dalej na podstawie (2) i (3):}) \\
&= \left(\frac{d^2r}{dt^2} \cdot \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\theta \right) + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - r\omega^2 \cdot \vec{e}_r \right) \\
&\quad (\text{grupujemy współczynniki przy wersorach:}) \\
&= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \cdot \vec{e}_r + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \omega + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) \cdot \vec{e}_\theta
\end{aligned} \tag{4}$$

I to jest wszystko, co można powiedzieć o ruchu Planety z samej geometrii, zanim jeszcze dowiemy się, jak działa grawitacja.

4 Radialność pola grawitacyjnego

Założmy teraz, że przyspieszenie grawitacyjne pochodzące od Słońca działa na Planetę *radialnie*, czyli wzdłuż wersora $\vec{e}_r$ (prosto *do* Słońca lub prosto *od* Słońca):

$$\vec{a} = a \cdot \vec{e}_r$$

(a może być ujemne). Nie zakładamy jeszcze prawa Newtona o sile tego oddziaływania, na razie ważna jest tylko jego radialność.

Z przyrównania do (4) oraz z faktu, że wersory $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\theta$ są do siebie ortogonalne, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = a \\ 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \omega + r \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Lewa strona drugiego z tych równań jest równa

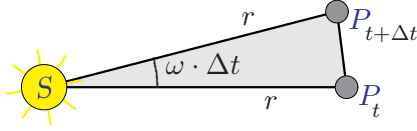
$$2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \omega + r \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(r^2\omega)}{dt}$$

Ponieważ ma ona być zerem, różniczkowane wyrażenie musi być stałe:

$$r^2\omega = K \tag{6}$$

Wielkość $L = mr^2\omega$ nazywa się *momentem pędu*. Powyższa stała K tym się różni od momentu pędu, że nie zawiera masy, ale to nie ma znaczenia dla dalszych rozważań. Istotne

jest tylko, że przy centralnie działającej grawitacji K jest stałe, tak jak i moment pędu jest stały. Żeby to wiedzieć, nie trzeba znać wzoru na grawitację. Nawet nie jest istotne, żeby pole grawitacyjne było stałe w czasie — jego natężenie może pulsować, niekoniecznie tak samo we wszystkich punktach przestrzeni. Jeśli jest radialne, to moment pędu jest stały.



Stałość momentu pędu pociąga za sobą drugie prawo Keplera. Jak widać z rysunku obok, pole wąskiego trójkąta, „zamiecionego” przez promień wodzący Planety w czasie Δt , wynosi

$$0.5 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t) \approx 0.5 \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \Delta t$$

czyli prędkość polowa wynosi $0.5 \cdot r^2 \cdot \omega = K$, a więc jest stała.

Dla uzyskania kształtu trajektorii planety należy wyrazić r jako funkcję od kąta θ . Żeby do tego dojść, zastąpmy różniczkowanie po czasie różniczkowaniem po kącie:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \omega \quad (\text{na podstawie (6)}) \quad = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{K}{r^2}$$

I druga pochodna:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{K}{r^2} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{K}{r^2} \right) \cdot \frac{K}{r^2} \\ &(\text{ponieważ } \frac{dr^{-1}}{d\theta} = -\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{1}{r^2}, \text{ a } K \text{ jest stałe:}) \\ &= -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr^{-1}}{d\theta} \right) \cdot \frac{K^2}{r^2} = -\frac{K^2}{r^2} \cdot \frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Otrzymane w ten sposób wyrażenie na *przyspieszenie radialne* Planety wstawmy teraz do pierwszego równania układu (5):

$$-\frac{K^2}{r^2} \cdot \frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2} - r\omega^2 = a$$

Przyp. 1:

Grawitacja: dowolna radialna.

Prędkość kątowa: 0.

Trajektoria: linia prosta — spadek na Słońce lub ucieczka od Słońca.

Gdyby moment pędu był zerowy, to nie byłoby czego rozważać: Planeta albo spadałaby na Słońce, albo by się od niego oddalała po linii prostej.

Żeby moment pędu był niezerowy, musimy mieć $K \neq 0$ — i odtąd będziemy zawsze zakładać, że ta nierówność zachodzi. W takim razie możemy pomnożyć obie strony powyższej równości przez $-\frac{r^2}{K^2}$:

$$\frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2} + \frac{r^3\omega^2}{K^2} = -\frac{ar^2}{K^2}$$

ale $\frac{r^3\omega^2}{K^2} = \frac{(r^2\omega)^2}{rK^2} = \frac{K^2}{rK^2} = r^{-1}$, więc

$$\frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2} + r^{-1} = -\frac{ar^2}{K^2} \quad (8)$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie różniczkowe stopnia drugiego (do drugiej pochodnej) na r^{-1} , czyli na zależność odwrotności promienia wodzącego Planety od kąta θ . Oczywiście znając odwrotność promienia r^{-1} , będziemy mogli łatwo obliczyć sam promień r . Ale to, czy będziemy umieli rozwiązać to równanie, krytycznie zależy od przyspieszenia radialnego a .

5 Konkretnie siły przyciągania

Przypominam, że rozwiązania r równania (8), kończącego poprzedni rozdział, poprawnie opisują trajektorie Planety przy założeniu, że grawitacja działa radialnie, czyli wzdłuż promienia wodzącego.

Równanie różniczkowe (8) potrafię rozwiązać symbolicznie dla przypadku, gdy

$$a = -\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^3} \quad (9)$$

dla pewnych stałych A i B . Ten przypadek obejmuje grawitację newtonowską, bo podstawienie $A = GMm$ i $B = 0$ dają wzór Newtona (1) ze str. 3.

Przyspieszenie radialne a określone w (9) wstawmy do równania (8):

$$\frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2} + r^{-1} = \frac{A}{K^2} + \frac{B}{K^2} \cdot r^{-1}$$

czyli

$$\frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{B}{K^2}\right) \cdot r^{-1} = \frac{A}{K^2}$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe niejednorodne stopnia drugiego z funkcją niewiadomą $h(\theta) = r(\theta)^{-1}$:

$$h'' - D^2 \cdot h = \frac{A}{K^2} \quad \text{gdzie } D = \sqrt{\frac{B}{K^2} - 1} \quad (10)$$

Rozwiązaniem tego równania są funkcje

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \frac{A}{2K^2} \cdot \theta^2 + c_1 \cdot \theta + c_2 & \text{dla } K^2 = B \text{ (czyli } D = 0) & \text{ oraz} \\ h(\theta) &= c_1 \cdot e^{D\theta} + c_2 \cdot e^{-D\theta} - \frac{A}{D^2 K^2} & \text{dla } K^2 \neq B \text{ (czyli } D \neq 0) \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie c_1 i c_2 są stałymi zależnymi od warunków początkowych. Czytelnik może łatwo sprawdzić poprawność tych rozwiązań albo w zwykły sposób, rozwiązując (10), albo tylko podstawiając podane wyżej gotowe wyrażenia do lewej strony (10) i wykonując różniczkowanie.

5.1 Przypadek $K^2 = B$, trajektorie spiralne

Najprostszy przypadek $D = 0$ zachodzi gdy $K^2 = B$, czyli gdy przyspieszenie radialne Planety (por. (9)) wynosi

$$a = -\frac{A}{r^2} - \frac{K^2}{r^3} = -\frac{A}{r^2} - r\omega^2$$

($r\omega^2$ to przyspieszenie odśrodkowe Planety). Z równości $h(\theta) = r(\theta)^{-1}$ i z rozwiązania (11) odległość Planety od Słońca wyraża się wzorem

$$r = \frac{2B}{A \cdot \theta^2 + d_1 \cdot \theta + d_2}$$

dla nowych stałych d_1 i d_2 , zależnych od początkowej odległości i początkowej prędkości radialnej Planety. Załóżmy, że początkowo $\theta_0 = 0$, czyli Planeta „startuje” z dodatniej półosi x , w początkowej odległości r_0 od Słońca i że początkowa prędkość zmian odległości w zależności od kąta wodzącego wynosi³ $s_0 = \frac{dr}{d\theta} |_{\theta=0}$. Wtedy stałe d_1 i d_2 wyliczymy następująco:

$$r_0 = \frac{2B}{A \cdot 0^2 + d_1 \cdot 0 + d_2} \quad \text{stad} \quad d_2 = \frac{2B}{r_0}$$

oraz

$$s_0 = \frac{d\left(\frac{2B}{A\theta^2 + d_1\theta + d_2}\right)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -\frac{d_1 r_0^2}{2B} \quad \text{stad} \quad d_1 = -2B \frac{s_0}{r_0^2}$$

Ostatecznie więc odległość Planety od Słońca wyraża się wzorem

$$r = \frac{1}{\frac{A}{2B} \cdot \theta^2 - \frac{s_0}{r_0^2} \cdot \theta + \frac{1}{r_0}} \quad (12)$$

Łatwo widać, że mianownik ułamka w tym wzorze może być stały tylko dla $A = s_0 = 0$ — wtedy wzór opisuje okrąg o promieniu r_0 ; prędkość kątowa wynosi wtedy $\omega = \frac{K}{r_0} = \frac{\sqrt{B}}{r_0^2}$.

Przyp. 2:

Grawitacja: $-\frac{B}{r^3}$ (bo $A = 0$), $B = K^2$.

Prędkość kątowa: stała $\omega = \frac{\sqrt{B}}{r_0^2}$.

Trajektoria: niestabilny okrąg o promieniu r_0 .

Taka kolista orbita jest niestabilna: nawet bardzo mała zmiana odległości r (np. pod wpływem grawitacji pochodzącej od innego ciała niebieskiego) spowoduje, że chwilowo $s_0 \neq 0$ i odtąd już będzie tak jak w przypadkach omówionych niżej.

³Wielkości $s = \frac{dr}{d\theta}$ proszę nie nazywać prędkością radialną Planety. Prędkość radialna liczona jest w stosunku do czasu a nie do kąta: $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = s \cdot \omega$.

W każdym innym przypadku ze wzrostem kąta θ mianownik ułamka we wzorze (12) albo rośnie do $\pm\infty$ (zależnie od znaku współczynnika $\frac{A}{2B}$), albo maleje do zera (do miejsca zerowego mianownika); tak więc odległość Planety od Słońca albo maleje do zera, albo rośnie do nieskończoności. Ten wzór przedstawia więc różne spirale, po których planeta albo coraz bardziej zbliża się ku Słońcu, aż do ostatecznej katastrofy, albo ucieka do nieskończoności.

Rysunek obok, wykonany programem **gnuplot** (zob. [3]), przedstawia tor Planety dla $A = 0.1$, $B = 1.0$, $r_o = 2.0$ i $s_0 = 0.0$ dla argumentu $\theta \in [0..5\pi]$. Tu i w dalszych **gnuplot**owych rysunkach trajektorii Planeta zaczyna swój bieg od kąta $\theta = 0$ (czyli od dodatniej półosi x) i porusza się w kierunku dodatnim, czyli przeciwnie do wskazówek zegara.

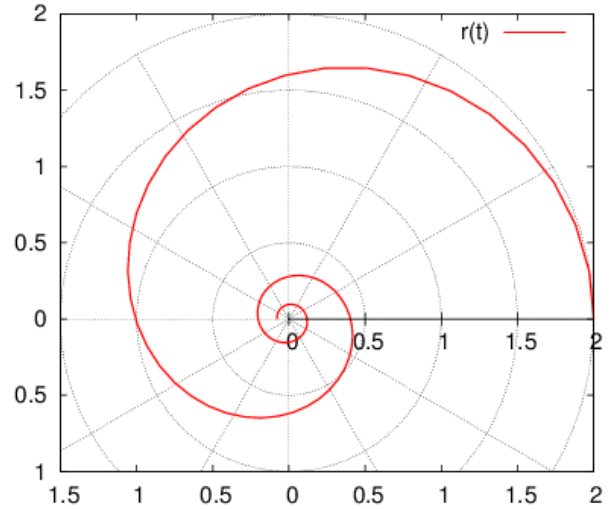
Jak widać, Planeta po torze spiralnym wchodzi w Słońce. Gdyby współczynnik $\frac{A}{2B} < 0$, to spirala „rozwijalaby się” w drugą stronę, do nieskończoności, ale potem „wracała” z nieskończoności i wchodziła w Słońce spiralą. Niech Czytelnik samodzielnie narysuje trajektorię dla tego przypadku.

Przyp. 3:

Grawitacja: $-\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^3}$, $B = K^2$.

Prędkość kątowna: $\omega = \frac{\sqrt{B}}{r^2}$.

Trajektoria: spirala.



5.2 Przypadek $K^2 > B$, trajektorie newtonowskie

Założmy teraz, że B jest małe, czyli wpływ na grawitację składnika proporcjonalnego do r^{-3} jest nieduży — por. wzór (9) ze str. 7. Dokładniej: założmy, że $B < K^2$ (ciągle obowiązuje założenie, że $K \neq 0$). Do tego przypadku stosuje się drugie z rozwiązań równania (10) podanych w (11) na str. 7:

$$h(\theta) = c_1 \cdot e^{D\theta} + c_2 \cdot e^{-D\theta} - \frac{A}{D^2 K^2}$$

a w tym przypadku $D = \sqrt{\frac{B}{K^2} - 1}$ jest liczbą urojoną, bo liczba podpierwiastkowa jest ujemna. Wobec tego eksponensy w równaniu zamieniają się w okresowe funkcje trygonometryczne⁴. Czytelnik proszony jest teraz albo o uproszczenie powyższego rozwiązania dla tego przypadku, albo tylko o sprawdzenie, że w tym przypadku funkcje

$$h(\theta) = c \cdot \cos\left(\theta \cdot \sqrt{1 - \frac{B}{K^2}} + d\right) + \frac{A}{K^2 - B}$$

⁴Zgodnie z zasadą, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

są rozwiązaniami równania (10) ze str. 7 dla dowolnych stałych c i d . Wobec tego odległość Planety od Słońca wynosi

$$r(\theta) = \frac{1}{h(\theta)} = \frac{K^2 - B}{c \cdot (K^2 - B) \cdot \cos\left(\theta \cdot \sqrt{1 - \frac{B}{K^2}} + d\right) + A}$$

dla pewnych stałych c i d zależnych od warunków początkowych. Stała d dodana do argumentu kosinusa nie zmienia kształtu krzywej, a tylko powoduje jej obrót. Dla uproszczenia nie będę więc jej brał pod uwagę, czyli przyjmę, że $d = 0$. Założenie, że początkowo (w chwili, gdy $\theta = 0$) odległość Planety od Słońca wynosi r_0 , pozwala wyeliminować również drugą stałą:

$$r_0 = \frac{K^2 - B}{c \cdot (K^2 - B) + A} \quad \text{więc} \quad c = \frac{1}{r_0} - \frac{A}{K^2 - B}$$

Więc ostatecznie wzór na odległość Planety od Słońca ma postać

$$r(\theta) = \frac{(K^2 - B) \cdot r_0}{A \cdot r_0 + (K^2 - B - A \cdot r_0) \cdot \cos\left(\theta \cdot \sqrt{1 - \frac{B}{K^2}}\right)} \quad (13)$$

Jakie tory Planety przewiduje ten wzór? Ponieważ parametr kątowy θ występuje we wzorze (13) wyłącznie pod kosinusem, należy się spodziewać periodyczności funkcji odległości:

$$r(\theta) = r \left(\theta + \frac{2\pi K}{\sqrt{K^2 - B}} \right)$$

dla wszystkich θ . Ta periodyczność oznacza, że wartości odległości Planety od Słońca r będą się powtarzać okresowo, co kątem $\frac{2\pi K}{\sqrt{K^2 - B}}$ ⁵. Ale, **uwaga!** — po drodze tor Planety może natrafić na taki kąt θ , dla którego mianownik ułamka w równości (13) jest zerowy. Wtedy Planeta oddali się do nieskończoności i nie należy się spodziewać, że prędko wróci...

W klasycznym przypadku newtonowskim, kiedy $B = 0$, czyli siła przyciągania jest proporcjonalna tylko do r^{-2} , wzór (13) sprowadza się do

$$r(\theta) = \frac{\frac{K^2}{A}}{1 + \left(\frac{K^2}{Ar_0} - 1\right) \cdot \cos(\theta)}$$

Co to jest za krzywa?

Nietrudno jest pokazać, że wzór

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + p \cdot \cos(\theta)}$$

przedstawia elipsę dla $0 \leq p < 1$, parabolę dla $p = 1$ i hiperbolę dla $p > 1$ — o ognisku w środku układu współrzędnych. Czynniki skalujący $\frac{K^2}{A}$ w liczniku ułamka ma wpływ na wielkość krzywej, ale nie na jej kształt. Wobec tego w przypadku $B = 0$ trajektorią Planety jest

⁵Ale to nie znaczy, że Planeta będzie co okres funkcji trafiać w ten sam punkt przestrzeni.

- **elipsa**, jeśli $r_0 > \frac{K^2}{2A} = \frac{r_0^4 \omega_0^2}{2A}$, czyli $\omega_0^2 < \frac{2A}{r_0^3}$, gdzie ω_0 to prędkość kątowna Planety dla jej kąta wodzącego równego 0;

Przyp. 4:Grawitacja: $-\frac{A}{r^2}$.Prędkość kątowna dla $\theta = 0$:

$$\omega_0 < \sqrt{\frac{2A}{r_0^3}}.$$

Trajektoria: elipsa.

- **parabola**, jeśli $\omega_0^2 = \frac{2A}{r_0^3}$;

Przyp. 5:Grawitacja: $-\frac{A}{r^2}$.Prędkość kątowna dla $\theta = 0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2A}{r_0^3}}.$$

Trajektoria: parabola.

- **hiperbola**, jeśli $\omega_0^2 > \frac{2A}{r_0^3}$;

Przyp. 6:Grawitacja: $-\frac{A}{r^2}$.Prędkość kątowna dla $\theta = 0$:

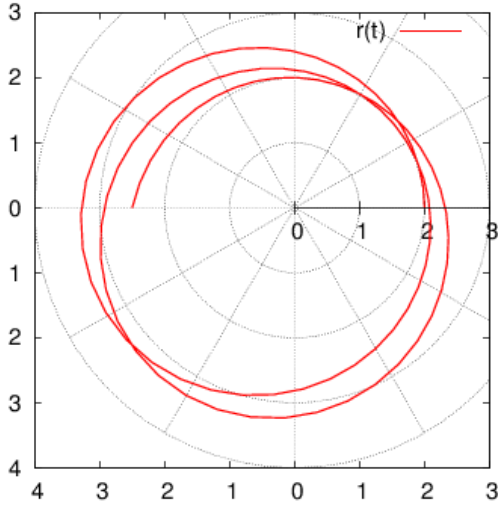
$$\omega_0 > \sqrt{\frac{2A}{r_0^3}}.$$

Trajektoria: hiperbola.

— we wszystkich trzech przypadkach punkt $\langle 0, 0 \rangle$, czyli Słońce, jest ogniskiem krzywej stożkowej. Dla Planety, krążącej wokół Słońca po elipsie, zwiększanie prędkości kątowej będzie powodowało wydłużanie elipsy (zwiększanie jej ekscentryczności), aż do granicznej wartości $\omega_0 = \sqrt{\frac{2A}{r_0^3}}$ (kątowna prędkość ucieczki), po dojściu do której elipsa przekształci się w parabolę. Jeśli prędkość kątowna przekroczy tę wartość, to torem Planety stanie się hiperbola. To uzasadnia pierwsze prawo Keplera.

Wróćmy do wzoru (13), ale już bez założenia, że $B = 0$. Niech $0 < B < K^2$ — to znaczy, że w sile przyciągania grawitacyjnego istotnie występuje składnik proporcjonalny do r^{-3} , ale jest on stosunkowo niewielki. Wtedy równość (13) daje się przekształcić do

$$r = \frac{\frac{K^2 - B}{A}}{1 + \left(\frac{K^2 - B}{Ar_0} - 1 \right) \cdot \cos \left(\theta \cdot \sqrt{1 - \frac{B}{K^2}} \right)}$$



Tak więc ten wzór opisuje *prawie* krzywą stożkową. Za to, że nie jest to dokładnie krzywa stożkowa jak poprzednio, odpowiada mnożnik $\sqrt{1 - \frac{B}{K^2}}$ przy kącie θ , pod kosinusem. Powoduje on, że elipsa się „nie domyka”. Kiedy kąt θ zakreśli pełny obrót, czyli całe 2π , to argument kosinusa zakreśli $2\pi\sqrt{1 - \frac{B}{K^2}}$; czyli mniej niż pełny obrót (bo w tym przypadku $\sqrt{1 - \frac{B}{K^2}} < 1$). Wynikiem jest „obracająca się” krzywa stożkowa. Obok jest wykonany **gnuplotem** rysunek krzywej o wzorze

$$r(\theta) = \frac{2.5}{1 + 0.25 \cdot \cos(\theta \cdot 0.9)}$$

Przyp. 7:

Grawitacja: $-\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^3}$.

Prędkość kątowa dla $\theta = 0$:

$$\max\left(\sqrt{\frac{A}{r_0^3}}, \sqrt{\frac{B}{r_0^2}}\right) < \omega_0 < \sqrt{\frac{2A}{r_0^3}}.$$

Trajektoria: obracająca się elipsa.

dla argumentu $\theta \in [0 \dots 5\pi]$. Planeta „startuje” z dodatniej półosi x , biegnie prawie po elipsie, ale w pobliżu Słońca zbyt szybko zakręca, a w oddali od Słońca zbyt wolno zakręca — i efekt jest taki, jakby eliptyczna orbita Planety sama kręciła się z wolna w tym

samym kierunku, w którym Planeta się porusza. Z taką precesją orbit planet (ale znacznie mniejszą) mamy do czynienia w rzeczywistości⁶. Jak widać, rachunkowo odpowiada za nią składnik siły przyciągania proporcjonalny do r^{-3} .

Oczywiście i w tym przypadku możliwy jest ruch Planety po obracającej się paraboli i hiperboli. Niech pozostanie zadaniem dla Czytelnika ustalenie, dla jakich parametrów tak się dzieje. I drugie ćwiczenie: dla jakich parametrów orbity obracają się w kierunku przeciwnym do biegu Planety?

5.3 Przypadek $K^2 < B$, trajektorie katastroficzne

Przyp. 8:

Grawitacja: $-\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^3}$.

Prędkość kątowa dla $\theta = 0$:

$$\omega_0 < \sqrt{\frac{B}{r_0^2}}.$$

Trajektoria: spirala.

Jeśli przyjmiemy, że składnik proporcjonalny do r^{-3} we wzorze (9) ze str. 7 jest dość duży, $B > K^2$, to wzór (11) na str. 7 na odwrotność odległości Planety od Słońca przyjmuje postać

⁶Precesja orbity Merkurego sięga ok. 5 sekund kątowych rocznie. Precesja orbit pozostałych planet jest jeszcze skromniejsza. To jest efekt spowodowany głównie przyciąganiem innych planet; a w mniejszym stopniu poprawkami relatywistycznymi, o których tutaj nie będzie mowy.

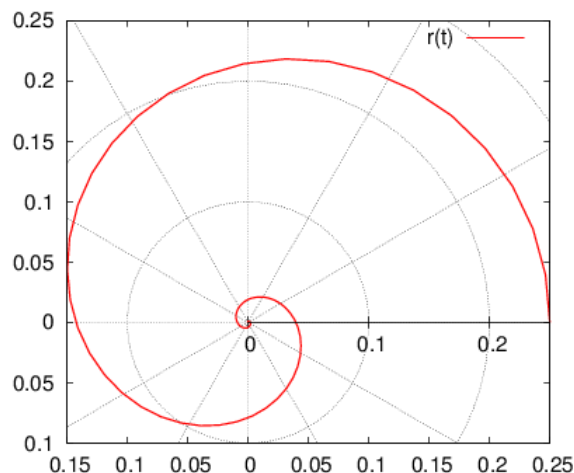
$$h(\theta) = c_1 \cdot e^{D\theta} + c_2 \cdot e^{-D\theta} - \frac{A}{D^2 K^2}$$

więc wzór na samą odległość Planety od Słońca ma postać

$$r(\theta) = \frac{1}{h(\theta)} = \frac{1}{c_1 \cdot e^{D\theta} + c_2 \cdot e^{-D\theta} - \frac{A}{D^2 K^2}}$$

gdzie $D = \sqrt{\frac{B}{K^2} - 1}$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Mianownik tego ułamka szybko rośnie ze wzrostem kąta θ , a więc r maleje do zera. Mamy więc znowu do czynienia ze spiralą zmierzającą ku Słońcu.



6 Poprawki do grawitacji newtonowskiej

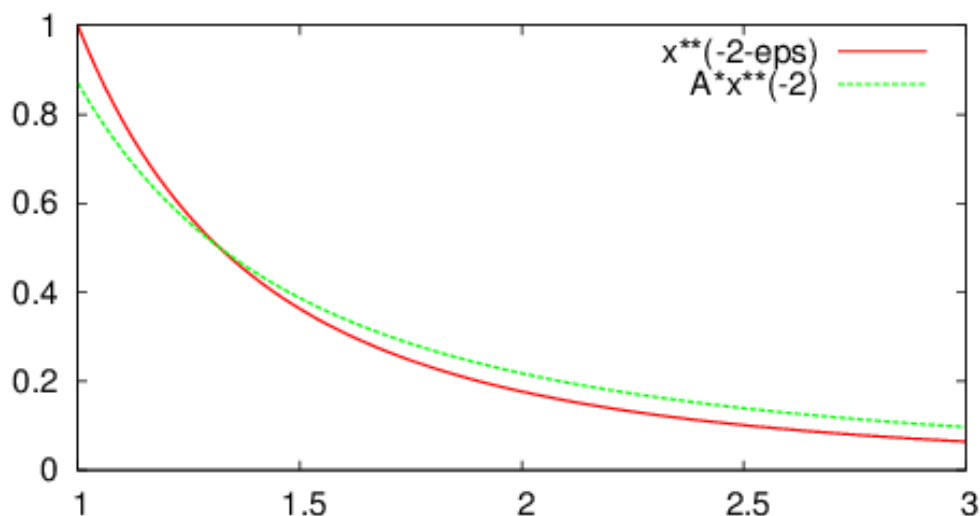
Już za czasów Newtona wiadomo było, że planety wokół Słońca (a także Księżyc wokół Ziemi) krążą po obracających się elipsach, jak w końcówce rozdz. 5.2. Taką *precesję*, czyli obrót elipsy, najłatwiej jest zauważyć na orbicie Merkurego, bo orbity pozostałych planet Układu Słonecznego są prawie kołowe.

Na pewnym etapie badań Newton zastanawiał się, czy przyspieszenie grawitacyjne jest proporcjonalne do r^{-2} , czy raczej do $r^{-(2+\varepsilon)}$ dla pewnego niewielkiego ε takiego że $|\varepsilon| > 0$. A ja na początku rozdz. 5 (str. 5) stwierdziłem, że będę rozpatrywał przyspieszenia grawitacyjne postaci $Ar^{-2} + Br^{-3}$ i jako jedyne uzasadnienie podałem, że tylko dla tego przypadku potrafię rozwiązać odpowiednie równanie różniczkowe. Wobec tego należy się teraz wyjaśnienie, co grawitacja proporcjonalna do $r^{-(2+\varepsilon)}$ ma wspólnego z grawitacją postaci $Ar^{-2} + Br^{-3}$.

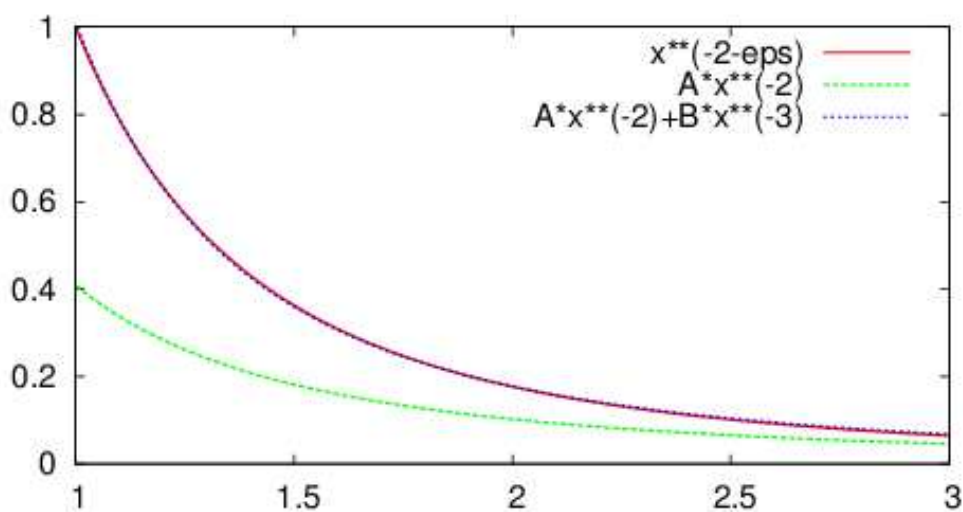
Przed wszystkim należy zdać sobie sprawę, że obserwowane precesje są niewielkie, więc gdyby grawitacja miała być proporcjonalna do $r^{-(2+\varepsilon)}$, to dla bardzo małego ε . Czy różnicę między grawitacją kwadratową a taką lekko zmienioną można dobrze przybliżyć składnikiem proporcjonalnym do r^{-3} ? Zamiast rachunków przedstawię teraz wykresy omawianych funkcji, to da nam wyobrażenie, o jakie wielkości toczy się walka.

Na poniższym rysunku (wykonanym **gnuplotem**) czerwona linia to wykres funkcji $f(x) = x^{-2.5}$ a zielona linia to wykres funkcji $g_A(x) = Ar^{-2}$ dla takiego mnożnika A , dla którego odległość⁷ tych dwóch wykresów w przedziale $[1.0 \dots 3.0]$ jest minimalna:

⁷Odległość w sensie L^2 , to znaczy $d(f, g) = \sqrt{\int_1^3 |f(x) - g(x)|^2 dx}$. Taka odległość funkcji jest naturalnym uogólnieniem zwykłej odległości punktów w przestrzeni euklidesowej.



Czyli zielona linia to najlepsze możliwe przybliżenie funkcji f funkcjami g_A . Natomiast poniżej próbowałem narysować na czerwono wykres tej samej funkcji f , a na niebiesko jej najlepsze możliwe przybliżenie (w tym samym sensie) funkcją postaci $h_{A,B}(x) = Ar^{-2} + Br^{-3}$:



Jak widać, linia czerwona i niebieska zwały się, dając kolor fioletowy — rozdzielczość rysunku jest zbyt mała, żeby odróżnić te dwie funkcje⁸. Na tej podstawie można uwierzyć (bo nie jest to formalny dowód), że nie popełniamy większego błędu rozpatrując grawitację postaci $Ar^{-2} + Br^{-3}$ zamiast grawitacji postaci $r^{-(2+\epsilon)}$.

7 Poglądowe wyjaśnienie wszystkiego, co się da

Jak widać z rachunków,

⁸Zielona linia oznacza funkcję $h_{A,0}$; poprawka sześcienna odpowiada więc za przejście od wykresu zielonego do fioletowego.

- przy założeniu klasycznej newtonowskiej grawitacji kwadratowej, czyli proporcjonalnej do r^{-2} ($B = 0$) Planeta krąży wokół Słońca po stacjonarnej orbicie eliptycznej, albo ucieka do nieskończoności po paraboli lub hiperboli;
- przy założeniu grawitacji sześcienniej, czyli proporcjonalnej do r^{-3} ($A = 0$) Planeta spada na Słońce lub ucieka do nieskończoności po spirali; może też krążyć wokół Słońca po niestabilnej orbicie kołowej;
- przy założeniu grawitacji pośredniej ($\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3}$) Planeta może jeszcze obiegać Słońce po *obracającej się* elipsie, albo uciekać do nieskończoności po *obracającej się* paraboli lub hiperboli.

Czy takie zjawiska da się wytłumaczyć **poglądowo**, a nie tylko rachunkowo?

7.1 To zasługa momentu pędu

Planeta nie spada na Słońce mimo tego, że jest przez nie przyciągana, dlatego że przyciąganie równoważone jest przez siłę odśrodkową. Spróbujmy tą jakościową opowieść poprzeć oszacowaniem „mocy” tej równowagi sił.

Ważne jest, że wszystkie rozpatrywane w tym artykule grawitacje są radialne, i dlatego działa w nich zasada zachowania momentu pędu (por. rozdz. 4 na str. 5). W trakcie ruchu Planety wartość $K = r^2\omega$ pozostaje stała.

Proszę teraz porównać, co przy założeniu klasycznej kwadratowej grawitacji newtonowskiej stanie się, gdy odległość Planety od Słońca r **zmiejszy się** p -krotnie. Wtedy

- przyspieszenie grawitacyjne Słońca **zwiększy się** p^2 -krotnie — bo grawitacja jest odwrotnie proporcjonalna do r^2 ;
- prędkość kątowna ω **zwiększy się** p^2 -krotnie — bo musi zostać zachowana wartość $K = r^2\omega$, a r zmaleje p -krotnie;
- w wyniku tego przyspieszenie odśrodkowe (równe $r\omega^2$) **zwiększy się** p^3 -krotnie (bo ω^2 wzrośnie p^4 -krotnie a r zmaleje p -krotnie).

Wobec tego przyciąganie wzrośnie p^2 razy a odpychanie wzrośnie p^3 razy. Przeważający wpływ odpychania odśrodkowego będzie więc działać na przywrócenie wcześniejszej większej odległości Planety od Słońca. I dlatego Planeta nie spadnie.

A teraz popatrzymy, co w analogicznej sytuacji stanie się przy założeniu grawitacji sześcienniej. Otóż jeśli odległość od Słońca r **zmiejszy się** p -krotnie, to

- przyspieszenie grawitacyjne Słońca **zwiększy się** p^3 -krotnie;
- prędkość kątowna ω (jak przedtem) **zwiększy się** p^2 -krotnie;
- w wyniku tego przyspieszenie odśrodkowe (równe $\omega^2 r$) **zwiększy się** (jak przedtem) p^3 -krotnie.

Wobec tego przyciąganie wzrośnie p^3 razy, a odpychanie wzrośnie również p^3 razy. Nie ma więc żadnej przewagi odpychania nad przyciąganiem. Wobec tego nic nie wyhamuje rozpoczętego zbliżania się Planety do Słońca. Dlatego przy grawitacji sześcienniej nie ma stabilnych orbit.

7.2 Skąd precesje?

Precesja orbity Merkurego (ok. 5 sekund kątowych rocznie) jest spowodowana głównie grawitacyjnym wpływem innych planet. Krążąc na zewnątrz orbity Merkurego, swoim przyciąganiem minimalnie kompensują one przyciąganie Słońca. Precesją orbit skutkuje wiele praw grawitacji różnych od newtonowskiej kwadratowej. Wynikiem prawie każdego odstępstwa od ścisłego $\frac{1}{r^2}$ jest *jakaś* precesja orbity. Ale tak na zdrowy rozum — **dlaczego** tak jest?

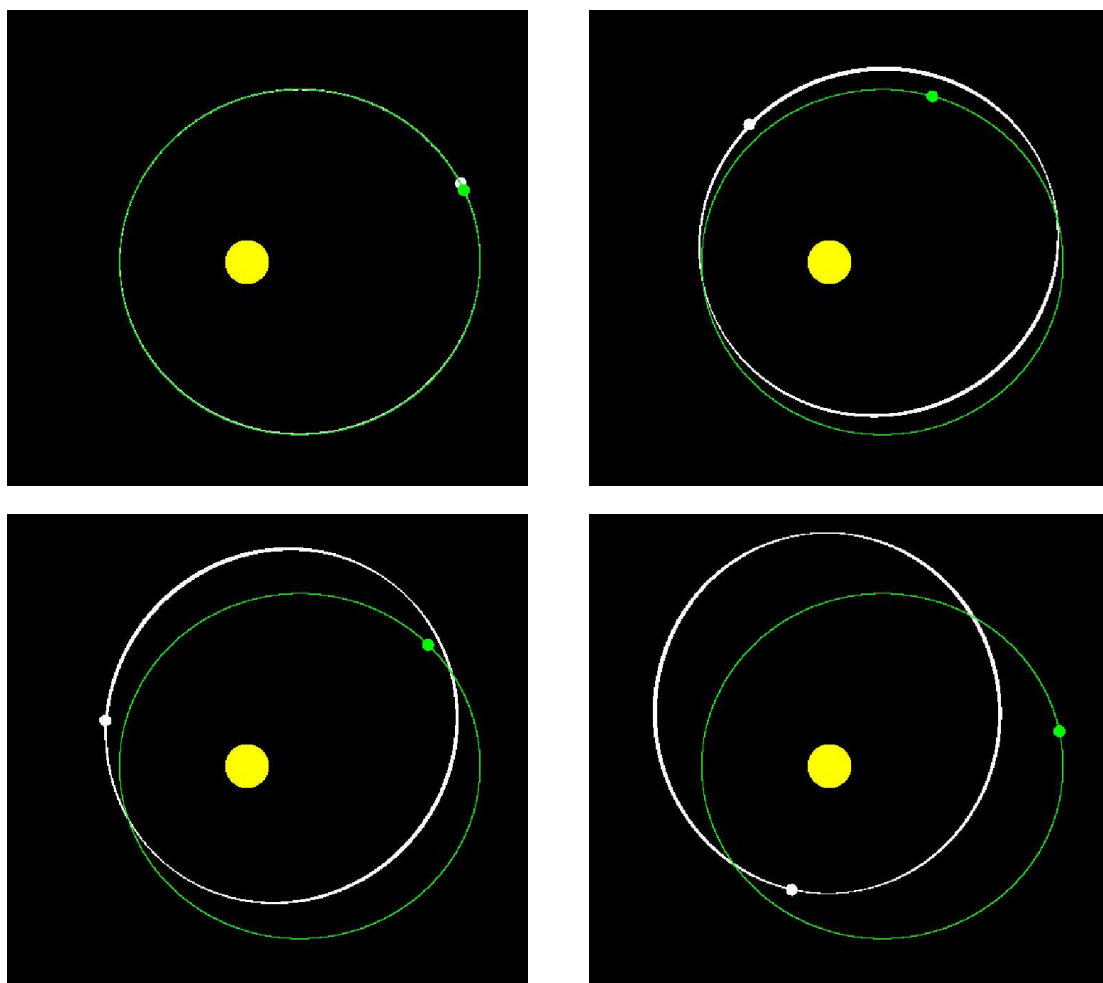
Precesja orbity (czyli jej obrót) przy nietypowej grawitacji nie pochodzi z tego, że ta grawitacja jest globalnie silniejsza, albo globalnie słabsza niż klasyczna. Jeśli zamiast przyspieszenia grawitacyjnego $A_0 r^{-2}$ zastosujemy przyspieszenie grawitacyjne $A_1 r^{-2}$ dla jakiegoś $A_1 > A_0$, to skutkiem będzie szybszy ruch Planety, ale nadal po eliptycznej nieruchomej orbicie. Powodem precesji jest raczej to, że nietypowa grawitacja jest silniejsza od klasycznej w jakichś odległościach od Słońca, a słabsza w innych.

Rozważmy dwie planety, P_0 oraz P_1 , krążące wokół Słońca wg trochę różniących się zasad grawitacji:

- P_0 jest przyciągana przez Słońce z przyspieszeniem kwadratowym $A_0 r^{-2}$,
- P_1 jest przyciągana przez Słońce z przyspieszeniem $A_1 r^{-2} + B_1 r^{-3}$.

Założmy przy tym, że obie planety startują z tego samego miejsca $\vec{r}_0$ z tą samą prędkością; oraz że stałe A_0 , A_1 i B_1 są tak dobrane, że $A_0 r_0^{-2} = A_1 r_0^{-2} + B_1 r_0^{-3}$. Wobec tego w punkcie startu przyspieszenia grawitacyjne oraz siły odśrodkowe działające na obie planety są równe. Ale jeśli w ruchu po orbicie planety trochę się oddalą od Słońca, to P_1 będzie przyciągana do niego słabiej niż P_0 , a jeśli zbliżą się do Słońca, to P_1 będzie przyciągana do niego silniej niż P_0 .

Poniższe obrazki powstały w wyniku symulacji numerycznej. Obie planety, zielona P_0 i biała P_1 , wystartowały z tego samego punktu (na rysunku: na „wschodnim” skraju zielonej elipsy, czyli w jej *aphelium*) z tą samą prędkością (w kierunku dodatnim, czyli przeciwnym do ruchu wskazówek zegarów mechanicznych) i zaczęły obiegać Słońce po (prawie) elipsie. Przez pewien czas, poruszały się po trajektoriach praktycznie nie do rozróżnienia na rysunku, ale biała planeta poruszała się nieco szybciej. W końcu trajektorie planet zaczęły się rozjeżdżać: biała elipsa podlegała obrotowi w kierunku ruchu planety:



Do czytania

- [1] R. Demkowicz-Dobrzański: Wyprowadzenie praw Keplera.
http://aneksy.pwn.pl/podstawy_fizyki/?id=801
Aneks internetowy do: D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *Podstawy fizyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005/2006. ISBN 83-01-13997-8.
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmana wykłady z fizyki, tom 1.1, mechanika, szczególna teoria względności*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013. ISBN 978-83-01-15007-5.
- [3] T. Williams, C. Kelley: Gnuplot 4.6 — An interactive plotting program.
http://www.gnuplot.info/docs_4.6/gnuplot.pdf
2014.
- [4] *Newton's theorem of revolving orbits*.
http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_theorem_of_revolving_orbits.